

2014（平成26）年度

大阪大学医学部医学科

学士編入学試験問題

【物 理 学】

問 題 冊 子

（注 意）

- 1 問題冊子及び解答用紙は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
- 2 受験番号は、解答冊子の表紙及び各解答用紙の受験番号欄に左詰めで、正確に記入すること。
- 3 問題冊子は、表紙を除き5枚ある。ただし、1枚目、5枚目は白紙である。
- 4 問題冊子又は解答用紙の落丁、印刷の不鮮明等がある場合は、解答前に申し出ること。
- 5 解答は、解答用紙の指定されたところに記入すること。枠からはみ出してはいけない。
- 6 計算等、下書きは解答冊子1枚目の白紙を使用すること。
- 7 問題冊子は、持ち帰ること。

I. 図1の太い実線はサイクロイド曲線

$$x = a(\phi - \sin \phi), \quad y = -a(1 - \cos \phi), \quad (0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 < a)$$

を描いたものである。このサイクロイド曲線の上, (x, y) 面内を質量 $m[\text{kg}]$ の小物体が運動する。小物体には鉛直下向き (y 軸の負の向き) に重力が働いており, 重力加速度は $g[\text{m/sec}^2]$ である。小物体は時刻 $t=0$ においてサイクロイド曲線上 $\phi = \pi - \alpha$ ($0 < \alpha < \pi$) の位置に静止していた。時刻 $t(>0)$ における小物体の位置を $\phi = \phi(t)$ で記述する。小物体に働く摩擦力は十分に小さく, 無視するものとする。

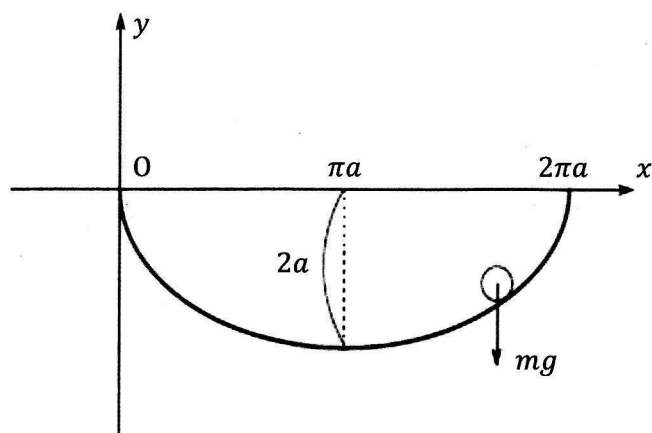


図 1

問1～問5に答えなさい。また, 解答に至るまでの考え方も述べなさい。

問1. 小物体が到達し得る最大の x 座標を答えなさい。

問2. 小物体の運動エネルギーを $m, \phi(t), \frac{d\phi(t)}{dt}, a, \alpha, g$ のうちで必要なものを用いて表しなさい。

問3. エネルギー保存則を表す式を $m, \phi(t), \frac{d\phi(t)}{dt}, a, \alpha, g$ のうちで必要なものを用いて表しなさい。

問4. 小物体の運動エネルギーが最大になるときの $\phi(t), \frac{d\phi(t)}{dt}$ の値を答えなさい。

問5. 小物体の周期運動の周期を計算し, 周期が α に依存しないことを示しなさい。

II. 原子番号 Z の原子核は、 Z 個の陽子を含んでいる。この原子核の周囲を 1 個の電子が周回する水素類似原子を考える。電子は半径 $a[\text{m}]$ の円運動をしているとする。以下では電子の質量を $m(=9.11 \times 10^{-31} \text{kg})$ 電子の電荷を $-e(e=1.60 \times 10^{-19} \text{C})$, 真空の誘電率を $\epsilon_0(=8.85 \times 10^{-12} \text{Fm}^{-1})$ と記すことにする。電子の質量 m に比べて原子核の質量は十分に重いものとせよ。

問 1 ~ 問 8 に答えなさい。また、解答に至るまでの考え方も述べなさい。

問 1. 電子に働くクーロン力が向心力になることから、電子の速さ v を m, a, e, ϵ_0, Z のうちで、必要なものを用いて表しなさい。

問 2. 電子の運動エネルギーとクーロン・エネルギーの和を m, a, e, ϵ_0, Z のうちで、必要なものを用いて表しなさい。

問 3. 原子番号 Z の水素類似原子内の電子の円運動に対しても、水素原子の場合と同様のボーアの量子条件

$$mva = \frac{h}{2\pi} n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を課すことにする。ここで $h(=6.63 \times 10^{-34} \text{Joule} \cdot \text{sec})$ はプランク定数を表す。 n は正の整数で量子数と呼ぶ。電子の円運動の半径が、特定の値に限定されることを示しなさい。

問 4. ボーアの量子条件を課せば、電子の全エネルギーは特定の値のみが許されることを示しなさい。

問 5. 円運動の周期を $T[\text{sec}]$ と記すならば、 $\frac{T^2}{a^3}$ は n に依らないことを示しなさい。

問 6. $Z=3$ の水素類似原子 (Li^{++}) の場合、問 4 で求めたエネルギー準位のうち基底状態にある電子は、光速 $c(=3.00 \times 10^8 \text{m/sec})$ のおよそ何パーセントの速さで円運動しているか。有効数字 3 桁の精度で答えなさい。

問 7. 原子番号 Z の水素類似原子内を運動する 1 個の電子が、量子数 n の状態から別の量子数 $n'(<n)$ の状態に遷移したとき、放出される光の波長 $\lambda[\text{m}]$ は

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

という公式で表される。定数 R' を $\epsilon_0, m, e, c, h, Z$ のうちで、必要なものを用いて表しなさい。

(Ⅱの続き)

問8. 図2は、ある原子番号 Z の水素類似原子内を運動する1個の電子が、量子数 $n(>4)$ の状態から量子数 $n'=4$ の状態に遷移したときに放出される光のスペクトル線の実験データである。図の上部の数字は放出される光の波長を、 $10^{-9}[\text{m}]$ を単位にして表している。図の下部には遷移前の状態の量子数 n の値を記してある。この実験データをもとにして R' の値の数値を有効数字2桁の精度で求めなさい。得られた R' の値は、水素原子スペクトルの公式に現れるリュードベリ定数 $R(=1.10 \times 10^7 \text{m}^{-1})$ といかなる関係にあるかを答えなさい。更にこの原子の原子番号 Z の値を推定しなさい。

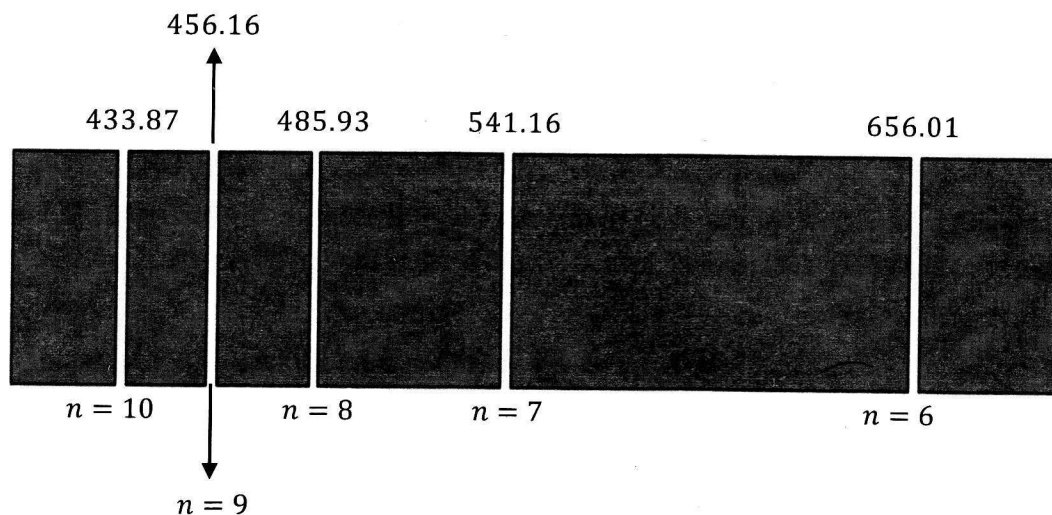


図2：図の上部の数字は放出される光の波長を、 $10^{-9}[\text{m}]$ を単位にして表している。

Ⅲ. 以下の文中の (1) ~ (22) に適切な式又は記号を記入しなさい。
ただし, (12) については正しい語句の記号を○で囲みなさい。

真空中を電磁波が伝わっている。この電磁波について考察しよう。まず, 真空中のマックスウェル方程式 ((a)から(d)) は電荷密度を ρ , 電流密度を $\mathbf{j}$ とすると,

$$(a) \operatorname{div} \mathbf{E} = \text{(1)}$$

$$(b) \operatorname{rot} \mathbf{E} = \text{(2)}$$

$$(c) \operatorname{div} \mathbf{B} = \text{(3)}$$

$$(d) \operatorname{rot} \mathbf{B} = \text{(4)}$$

で表される。ただし, 電場と磁場をそれぞれ $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ とし, 真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ϵ_0 と μ_0 とする。これらのマックスウェル方程式のうち, クーロンの法則に対応する式は (5) である。また, 磁気単極子がないということは (6) に対応し, アンペールの法則は (7) に, ファラデーの電磁誘導の法則は (8) に対応する。ただし, (5) ~ (8) の中には, (a) から (d) のうち適当なものを入れなさい。

さて, これらのマックスウェル方程式を使って電磁波を調べよう。今, 電磁波がある真空の領域には, 電荷密度も電流密度もなく, $\rho = 0$ で $\mathbf{j} = 0$ であるとする。

ベクトル公式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

を用いると,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \text{(9)} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

が得られる。これは波動方程式となっていて, 電磁波を表していることがわかる。この電磁波の, ある時刻 t の位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ での電磁波の電場ベクトル $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ が, 以下のよう
に与えられるとする。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \sin(kx + \omega t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

ただし, k と ω はある正の定数である。この電場ベクトルが式 (1) を満たすためには,
 $\frac{k}{\omega} = \text{(10)}$ であれば良い。この時, この電磁波の進行方向は, (11) 軸方向で (12) (a) 正, (b) 負 の向きである。また, この電磁波の速度の大きさは, E_0, k, ω から適当なものを用いて, (13) と表される。これは真空中の光速 c に等しい。さらに, マックスウェル方程式を使って, 時刻 t の位置 $\mathbf{r}$ でのこの電磁波の磁場ベクトル $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ は, 以下のように表される。

(Ⅲの続き)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{(14)} \\ \boxed{(15)} \\ \boxed{(16)} \end{pmatrix} \quad (3)$$

ただし、電磁波の磁場ベクトル $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ は、式 (2) の $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ のようにベクトルの成分を表示する形式で、 k と ω を使って求めること。また、時刻に依存する部分を求めるだけで良い。

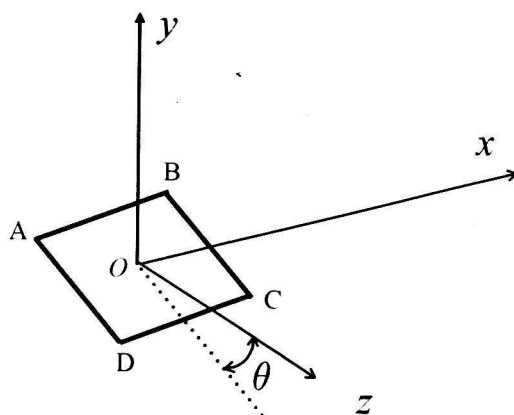


図 3:

次に、図 3 のように、原点 O を中心として一辺の長さ a で抵抗 R の正形状の銅線でできたコイルを固定して置く。正方形の辺 AB と辺 CD は x 軸と平行であり、正方形のコイル面は z 軸と θ の角度をなすように傾いて置く。ただし、このコイルは十分に小さいのでコイル内での電磁波の電場と磁場は一樣と見なせるとする。時刻 t において電磁波によりコイルを貫く磁束の大きさは、 $\boxed{(17)}$ である。この時刻 t に、電磁波によりコイルの回路に誘導される起電力は $\boxed{(18)}$ であり、このコイルに働く磁場による x 軸の周りの力のモーメント N は

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{(19)} \\ \boxed{(20)} \\ \boxed{(21)} \end{pmatrix} \quad (4)$$

で与えられる。このコイルで発熱する単位時刻あたりの平均ジュール熱は $\boxed{(22)}$ である。